Recherche de pires cas de sin(BIG) (en double précision)

Vincent Lefèvre

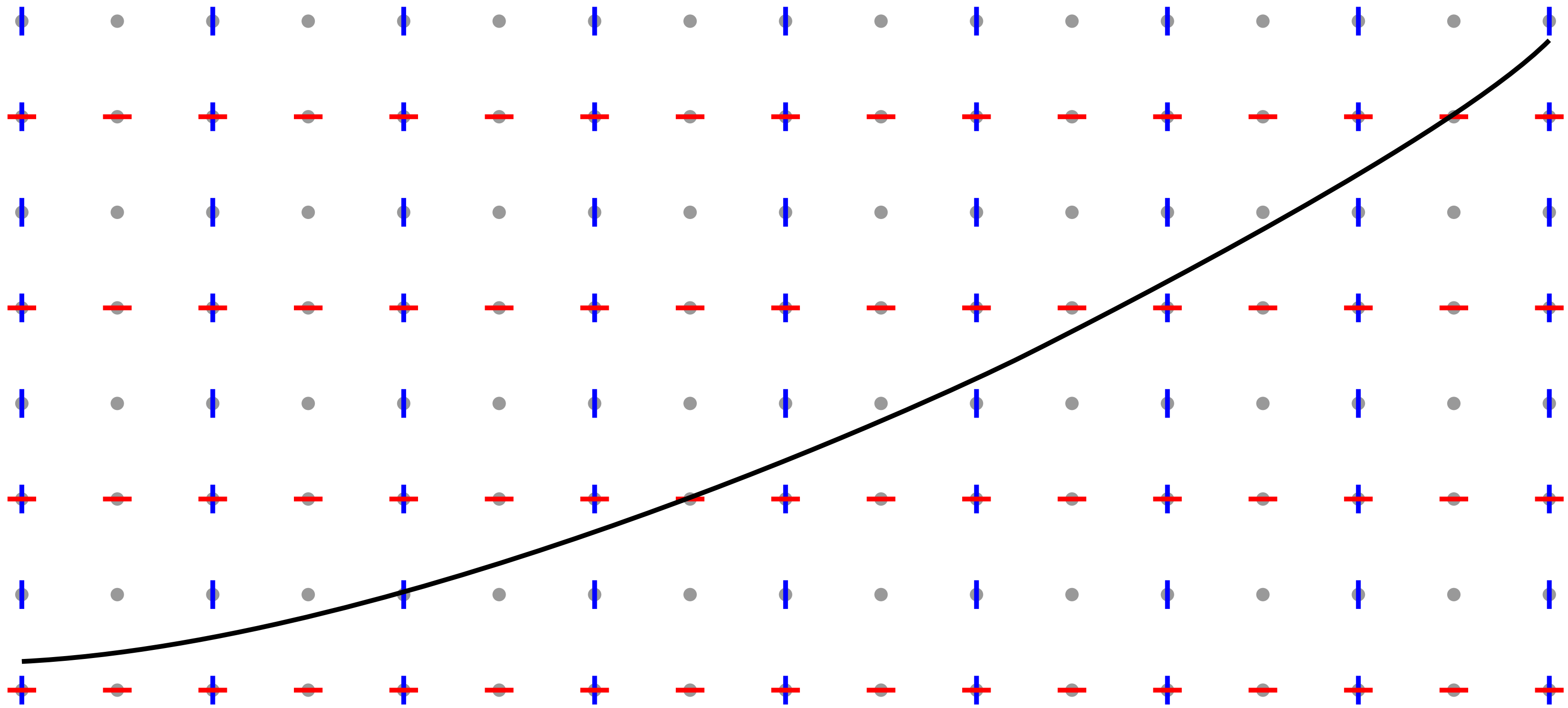
Loria / INRIA Lorraine

Journées au vert

15–16 juin 2006

Rappel du problème de recherche de pires cas

Trouver les points où la courbe de la fonction testée coupe un petit segment vertical (de longueur $\sim 2^{-50}$ de la distance de 2 points).



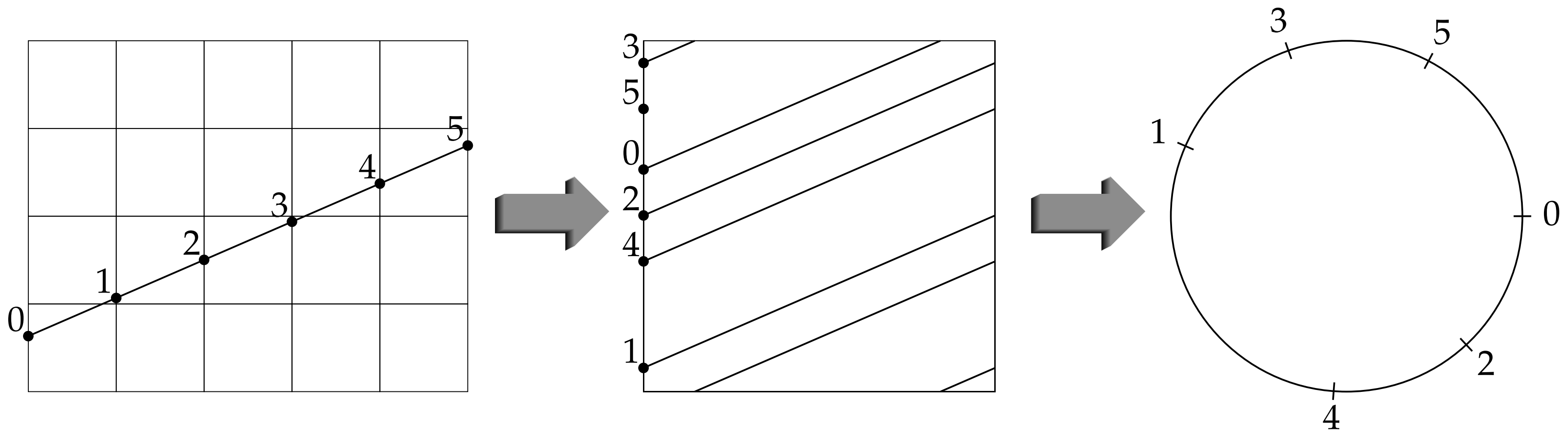
Dans chaque intervalle :

– f approchée par un polynôme de degré $1 \longrightarrow$ segment $y = b - ax$.

– Multiplication des coord. par des puissances de $2 \longrightarrow$ grille $= \mathbb{Z}^2$.

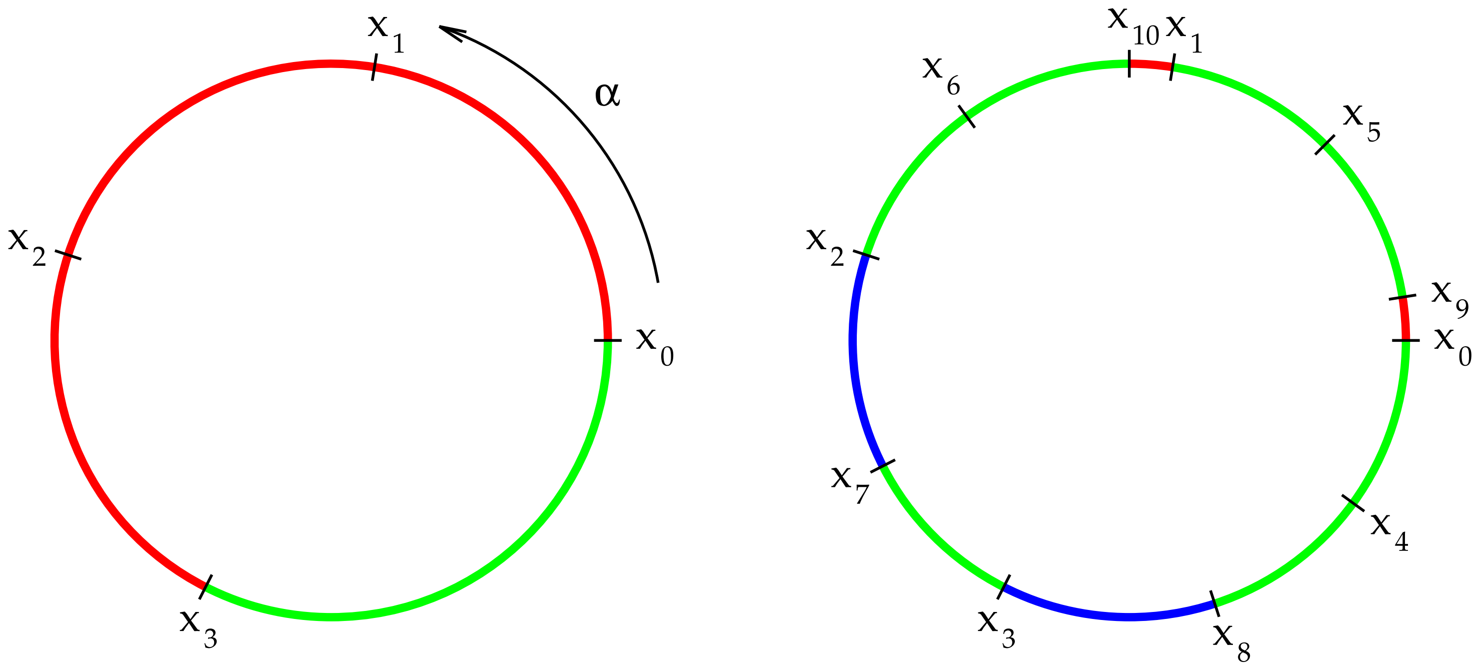
Trouver les n tels que $\{b - n.a\} < d_0$ où $a, b, d_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in [\![0, N-1]\!]$.

$\{x\}$ désigne la partie fractionnaire positive de x, i.e., $x - \lfloor x \rfloor$.

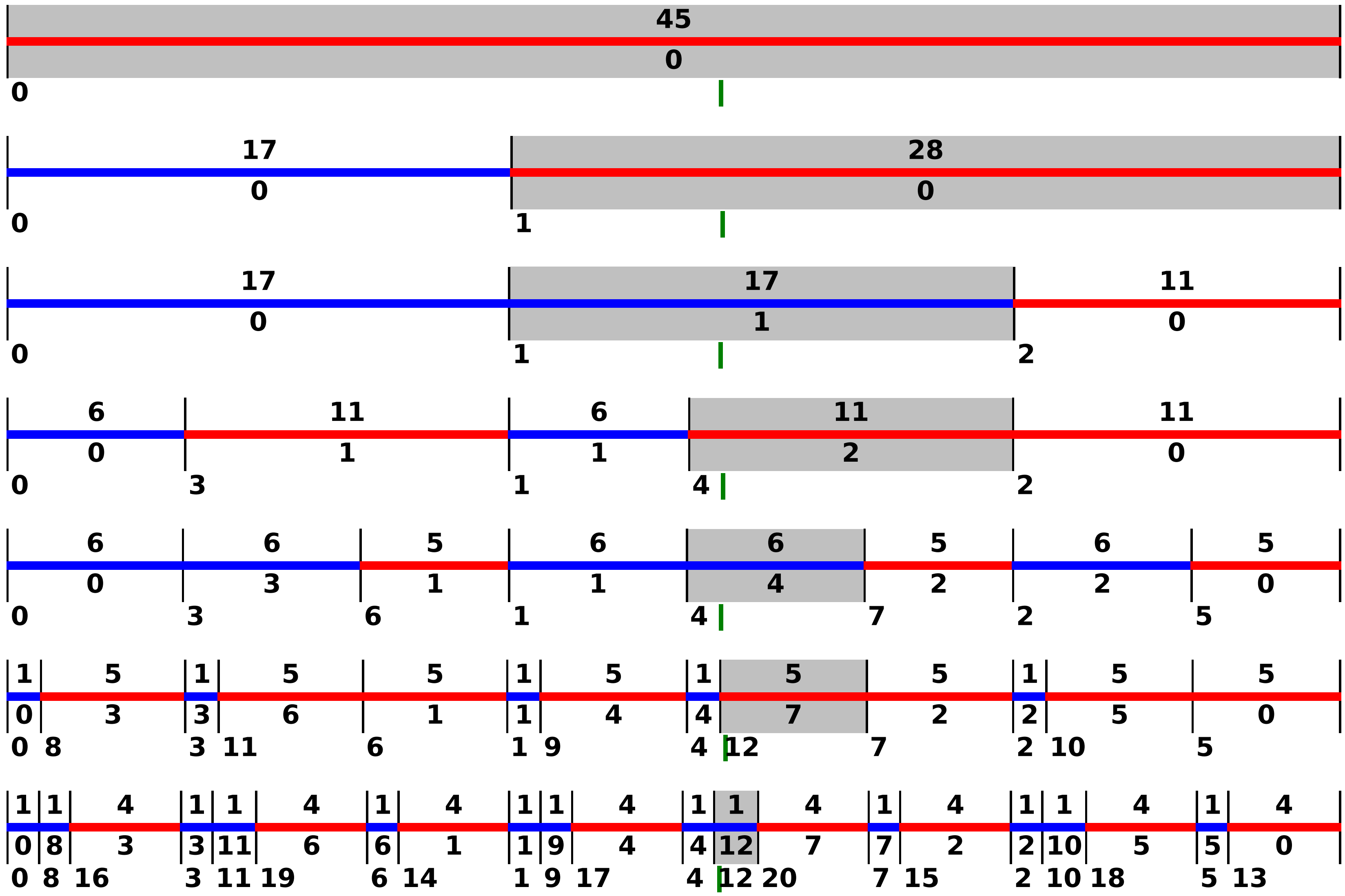


Note : alternativement, SLZ, mais pas intéressant dans la suite...

Théorème des 3 distances



- Arcs : 3 longueurs possibles (l'une est la somme des deux autres).
- Configurations particulières à 2 longueurs.



Fonctions périodiques avec gros arguments

Exemples : $\sin$, $\cos$, $\tan$, argument x au moins $\sim 2^9$ (?). Période : π.

Le problème : pour x grand, une petite variation relative (i.e., ajouter 1 ulp) de x provoque une grande variation de $f(x)$. Ce qui importe, c'est la *variation absolue* de x, donc le poids de $\mathrm{ulp}(x)$.

Note 1 : même problème avec $\exp$, mais là, on a vite un *overflow*.

Note 2 : si la période est un rationnel « simple » p/q, alors on peut ramener un gros argument x à une valeur $x - k.p$ plus petite et représentable, donc déjà considérée. Déjà fait avec les fonctions $\sin(2\pi x)$ et $\cos(2\pi x)$ de période 1 (et $\tan(2\pi x)$ partiellement).

Solution envisagée

– Ensemble des nombres machine (arguments à tester) ayant un exposant fixé : ils sont en progression arithmétique. Considérer éventuellement les exposants suivants aussi, avec la même progression arithmétique $\rightarrow$ ajoute des valeurs mais peut être intéressant en base 2 avec un algorithme sous-linéaire.

– Se ramener à une fonction « numériquement régulière » en mappant tous les arguments dans un intervalle de longueur π (probablement pas $[0, \pi]$, plutôt du style $[2^e, 2^e + \pi]$?).

– Au lieu de découper le domaine source en petits intervalles, on découpe de domaine réduit en petits intervalles (les arguments sont alors réordonnés).

Propriétés (exploitables ?)

– Théorème des 3 distances, etc.

– En augmentant le N (en passant sur l'exposant suivant), on se ramène à une configuration à 2 distances.

– Exposants suivants : pas d'erreur supplémentaire, intervalles de même taille mais avec plus de points (comp. cas régulier).

– Problème quand $f(x)$ est petit, mais traiter ce cas à part.

– Dans chaque sous-intervalle, chaque point est de la forme $\beta + i.\gamma + j.\delta$, avec i et j liés.

– Trouver une relation entre i et j ? Qu'en faire ? Est-ce utile ?

– Quelles informations peut-on obtenir en temps $O(\log(N))$?

Au-delà du théorème des 3 (2) distances

Propriétés liées aux suites sturmiennes ?

Théorème. *Pour $n \geqslant 3$, les intervalles de longueur γ et δ se répartissent de la manière suivante :*

$$\gamma^{q_1}\ \delta\ \gamma^{q_2}\ \delta\ \ldots\ \gamma^{q_m}\ \delta$$

ou

$$\gamma\ \delta^{q_1}\ \gamma\ \delta^{q_2}\ \ldots\ \gamma\ \delta^{q_m}$$

où les q_i prennent deux valeurs consécutives.

Preuve : par récurrence, en se basant sur mon article d'Arith'17.
Cf exemple transparent 4.

N'oublions pas la fonction testée...

- On s'intéresse à $f(\beta + i.\gamma + j.\delta)$.
- On découpe le domaine réduit en petits intervalles, où on approche $f(x)$ par $b - ax$.
- On obtient : $\beta' - i.\delta' - j.\gamma'$ avec $\beta' = b - a\beta$, $\delta' = a\delta$ et $\gamma' = a\gamma$.
- Résoudre $\{\beta' - i.\delta' - j.\gamma'\} < d_0$ avec i et j vérifiant certaines contraintes.